Zur Bestimmung

der

Elasticitätsconstanten von Krystallen.

Von

I. Beckenkamp.

(Mit 3 Holzschnitten.)

(Separat-Abdruck aus: »Zeitschrift für Krystallographie etc.« X. 1.
Leipzig, Wilhelm Engelmann 1885.)

ZUR BESTIMMUNG

DER

ELASTICITÄTSCONSTANTEN

VON

KRYSTALLEN.

HABILITATIONS-SCHRIFT

ZUR

ERLANGUNG DER VENIA LEGENDI FÜR PHYSIKALISCHE UND CHEMISCHE KRYSTALLOGRAPHIE DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

UNIVERSITÄT FREIBURG I. B.

VORGELEGT VON

DR. JACOB BECKENKAMP
AUS HORCHHEIM BEI COBLENZ.

MIT DREI FIGUREN IN HOLZSCHNITT.

LEIPZIG
WILHELM ENGELMANN
1885.

Separatabdruck aus der Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie X. 1.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Da die Bestimmung der Elasticitätsconstanten bei Krystallen mancherlei theoretische und experimentelle Schwierigkeiten bietet, so liegen bis jetzt nur noch wenige dieser Art vor. Die von den Herren Warburg und Koch*) angegebene Methode, welche aus der Bewegung von Interferenzstreifen die Grösse der Biegung ermittelt und auch bei verhältnissmässig kurzen Stäben hinlängliche Genauigkeit erzielt, ermöglicht es indessen, umfangreichere Beobachtungen anzustellen. Herr Koch bestimmte den Elasticitätscoëfficienten für senkrecht zu Dodekaëder- und senkrecht zu Würfelflächen geschnittene Stäbe von Steinsalz, Sylvin und chlorsaurem Natron.

§ 1.

Ueber die Symmetrieverhältnisse der Elasticitätsconstanten der hemiëdrischen Krystalle.

Zur vollständigen Bestimmung der Spannungsverhältnisse eines regulären Krystalls gehören nach Neumann**) drei Constanten: A, B, e. Bezeichnet man den Elasticitätscoëfficienten für ein in beliebiger Richtung aus dem Krystall geschnittenes Prisma mit E und die Cosinus der Richtungsunterschiede der grösseren Querdimension, der kleineren Querdimension und der Längsaxe mit den drei Axen des Krystalls $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, so ist nach Neumann:

$$\frac{1}{E} = \left(\frac{1}{2e} - \frac{B}{(A-B)(A+2B)}\right) - \left(\frac{1}{2e} - \frac{1}{A-B}\right)\left(\alpha_3^4 + \beta_3^4 + \gamma_3^4\right).$$

*) Ann. der Phys. und Chemie 1878, **5**, 251—265; Berichte über die Verhandl. der naturf. Gesellschaft zu Freiburg i. B. 1881, (2), **8**, 128; Zeitschr. f. Kryst. **9**, 206.

) Vergl. die Arbeiten von Herrn Voigt, Ann. der Phys. und Chemie 1876, Ergänzungsbd. **7, 5, 1882, **16**, 277, 409; Zeitschr. f. Kryst. **9**, 209, 214.

Durch verschiedene Wahl der α, β, γ kann man aus dieser Gleichung immer nur den Werth des Aggregates der ersten Klammer und den des Aggregates der zweiten Klammer bestimmen. Zur vollständigen Bestimmung der drei Constanten genügt also die Beobachtung der Biegung nicht, sondern man muss ausserdem noch die Drillungsformel:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{e} - 4\left(\frac{1}{2e} - \frac{1}{A-B}\right)\left(\alpha_3^2\alpha_1^2 + \beta_3^2\beta_1^2 + \gamma_3^2\gamma_1^2\right)$$

zu Hülfe nehmen und wenigstens für eine Richtung den Drillungscoëfficienten bestimmen.

Diese aus der Symmetrie nach den drei Würfelflächen und der Gleichwerthigkeit der drei Hauptaxen abgeleiteten Formeln gelten, nach der Neumann'schen Theorie wenigstens, ebensowohl für die regulär holoëdrischen als auch für die regulär hemiëdrischen Körper, da letztere durch bestimmte Drehungen in congruente oder symmetrische Stellungen gebracht werden können. So zum Beispiel kehren die tetraëdrischen Körper durch Drehungen um alle drei Hauptaxen um 180° in gleiche Stellungen zum Coordinatensystem zurück und haben ausserdem noch die Eigenschaft, durch eine Drehung um jede derselben um 45° in eine Stellung zu gelangen, in der jedesmal die beiden durch die Drehungsaxe gehenden Coordinatenebenen Symmetrieebenen sind*).

Dieselben Eigenschaften besitzen aber auch die holoëdrischen Körper und ausserdem noch die Symmetrie nach den drei Axenebenen.

Durch dieselben Drehungen, durch welche die pentagonal-hemiëdrischen Körper in congruente oder in irgendwie symmetrische Stellungen gebracht werden können, lassen sich auch die holoëdrischen Formen in die entsprechenden Stellungen bringen. Ausserdem aber besitzen letztere noch die Symmetrie nach den Dodekaëderflächen.

Während aus der Symmetrie nach den Dodekaëderflächen die Gleichwerthigkeit der drei Hauptaxen hervorgeht, folgt aus der Gleichwerthigkeit der drei Hauptaxen nicht nothwendig die geometrische Symmetrie der Dodekaëderflächen.

Die obigen aus der rhombischen Symmetrie und der Gleichwerthigkeit der drei Axen abgeleiteten Gleichungen der Biegungs- und Drillungscoëfficienten sind jedoch auch symmetrisch in Bezug auf die Dodekaëderflächen. Die pentagonal-hemiëdrischen (und ähnlich die übrigen hemiëdrischen) Körper müssen hiernach in Bezug auf ihre Elasticität eine höhere Symmetrie zeigen als in geometrischer Hinsicht.

Da die Aetzfiguren mit der geometrischen Symmetrie auch bei hemiëdrischen Krystallen genau übereinstimmen, so ist wenigstens für die

*) Wiedemann's Ann. der Phys. **16**, 275. Zeitschr. f. Kryst. **9**, 209.

Cohäsion bewiesen, dass diese dieselbe Symmetrie besitzt, wie die äusseren Umrisse.

Abgesehen von der Arbeit Baumgarten's über die Elasticität des Kalkspaths *), existiren bisher keine experimentellen Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse der Elasticität hemiëdrischer Körper. Da nun aber gerade beim rhomboëdrischen System die Anzahl der Elasticitätsconstanten auch nach der Theorie grösser sein muss, als bei den hexagonal-holoëdrischen Körpern, und die Symmetrie der Elasticitätscoëfficienten auch nach der erwähnten Theorie mit der geometrischen Symmetrie übereinstimmt, so fehlt bis jetzt für jene auffallende Erscheinung bei den übrigen Hemiëdrien noch die experimentelle Bestätigung.

Ich hoffte in dieser Hinsicht für die pentagonal-hemiëdrischen Körper des regulären Systems die Bestimmungen der Elasticitätscoëfficienten nach den verschiedenen Richtungen an einer kreisförmigen, parallel einer Hexaëderfläche geschliffenen Platte mit hinreichender Genauigkeit vornehmen zu können.

§ 2.

Bestimmung des Elasticitätscoëfficienten für eine bestimmte Richtung aus der Biegung einer kreisförmigen Platte.

Die Beobachtung der Biegung einer kreisförmigen Platte, welche auf zwei parallelen gleichen Sehnen aufliegt und in dem diesen parallelen Durchmesser belastet ist, kann zwar keineswegs diejenige Genauigkeit bieten wie die Beobachtung schmaler Stäbe; jedoch hätte diese Methode, falls sie genügende Resultate gäbe, den Vortheil, dass mit derselben Platte eine ganze Reihe verschiedener Coëfficienten bestimmt werden könnte, was besonders dann zweckmässig ist, wenn es weniger auf den absoluten Werth der einzelnen Coëfficienten, als auf deren gegenseitiges Verhältniss ankommt.

Statt dass die Platte zwischen den beiden Lagern von der Kraft P herabgedrückt wird, denke man, dieselbe würde von den beiden Lagerkanten mit der Kraft $\frac{P}{2}$ heraufgedrückt, während der belastete Durchmesser seine Lage nicht ändere. Diesen Durchmesser nehme man zur y-Axe und den darauf senkrechten Durchmesser als Richtung der x-Axe; die zur Ebene beider senkrechte (Dicken-) Richtung zur z-Axe. Der Nullpunkt sei der Schwerpunkt der Platte. Durch die vermöge der Kraft $\frac{P}{2}$ hervorgerufene Krümmung erleiden die oberen Schichten der Platte eine Verkürzung in der Richtung der x-Axe, die unteren eine ebensolche Verlängerung.

*) Ann. der Phys. und Chemie **152**, 369.

Um nun für die Grössenordnung der zu erwartenden Durchbiegung eine Orientirung zu gewinnen, wollen wir in erster Annäherung die Platte so behandeln, wie man einen unendlich dünnen Stab behandeln würde, nämlich folgende Annahme machen:

1) Die Biegung der Platte soll nur in Ebenen stattfinden, die der xz-Ebene parallel sind.

2) Die Krümmung der Platte soll dieselbe sein für alle Punkte, welche in einer der xz-Ebene parallelen Ebene liegen.

Betrachten wir nun ein Stück der Scheibe, welches zwischen einer Lagerkante und einer der y-Axe parallelen Geraden liegt, und drücken aus, dass das Drehungsmoment in Bezug auf die letztere verschwindet, so erhalten wir die Gleichung:

$$2Eb\frac{d^2z}{dx^2}\int_0^{\frac{h}{2}} z^2\,dz = \frac{P}{2}(l-x);$$

daraus folgt die Gleichung für die elastische Curve:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{12}{E}\,\frac{P}{2}\,\frac{l-x}{h^3 b}.$$

Für die kreisförmige Platte ist jedoch b nicht wie beim prismatischen Stabe eine Constante, sondern

$$b = 2\sqrt{r^2 - x^2},$$

folglich:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{3P}{Eh^3}\,\frac{l-x}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung, dass 1) für $x = 0$ auch $z = 0$ und dass 2) $\frac{dz_0}{dx_0} = 0$,

$$z_l = \frac{3P}{Eh^3}\left\{\left(l^2 + \frac{r^2}{2}\right)\arcsin\frac{l}{r} + \frac{3}{2}\,l\sqrt{r^2 - l^2} - 2rl\right\}.$$

z_l bezeichnet also die am Ende hervorgebrachte Hebung, oder in Wirklichkeit die in der Mitte zwischen den Lagern zu beobachtende Senkung s. Wird diese in halben Wellenlängen ausgedrückt, und bezeichnet n die Anzahl derselben und λ die betreffende Wellenlänge, ist also $s = n\frac{\lambda}{2}$, so ist

$$E = \frac{6P}{n\lambda h^3}\left\{\left(l^2 + \frac{r^2}{2}\right)\arcsin\frac{l}{r} + \frac{3}{2}\,l\sqrt{r^2 - l^2} - 2rl\right\}.$$

Nach Obigem wird bezeichnet mit:

E der Elasticitätcoëfficient,

P das belastende Gewicht,

n die Anzahl der halben Wellenlängen.

λ die Wellenlänge,
h die Dicke,
r der Radius der Platte,
l der halbe Abstand der Lager.

§ 3.
Beschreibung des Apparates.

Nach dem von den HH. Warburg und Koch*) angegebenen Principe liess Herr Professor Groth durch Herrn Breithaupt in Cassel den durch die beigefügten Figuren (sämmtlich in $\frac{1}{4}$ natürlicher Grösse ausgeführt) erläuterten Apparat für das mineralogische Institut der Universität Strassburg herstellen. Durch die von Herrn Prof. Groth eingeführten Umgestaltungen und Erweiterungen ist der Apparat nicht nur äusserst stabil und bequem geworden, sondern gestattet auch ausser der Dicken- und Breitenbestimmung (letzteres bei der Anwendung von Stäben), welche mit dem Sphärometer geschehen muss, alle übrigen Messungen mit völlig hinreichender Genauigkeit mit dem Apparate selbst vorzunehmen. Kleinere Umänderungen wurden auf Vorschlag des Verfassers vorgenommen.

Die 400 mm lange, 27 mm breite und 32 mm hohe Stahlschiene D ruht in der durch Fig. 1 (s. folg. S.) dargestellten Weise auf den verticalen massiven Metallplatten A; letztere mit dem ganzen Fussgestelle auf den drei Schrauben a. An die vordere Fussschiene ist vermittelst der Schraube k das verticale Metallstäbchen h angeklemmt, welches an seinem oberen Ende die um die verticale Axe drehbare planparallele Glasplatte trägt.

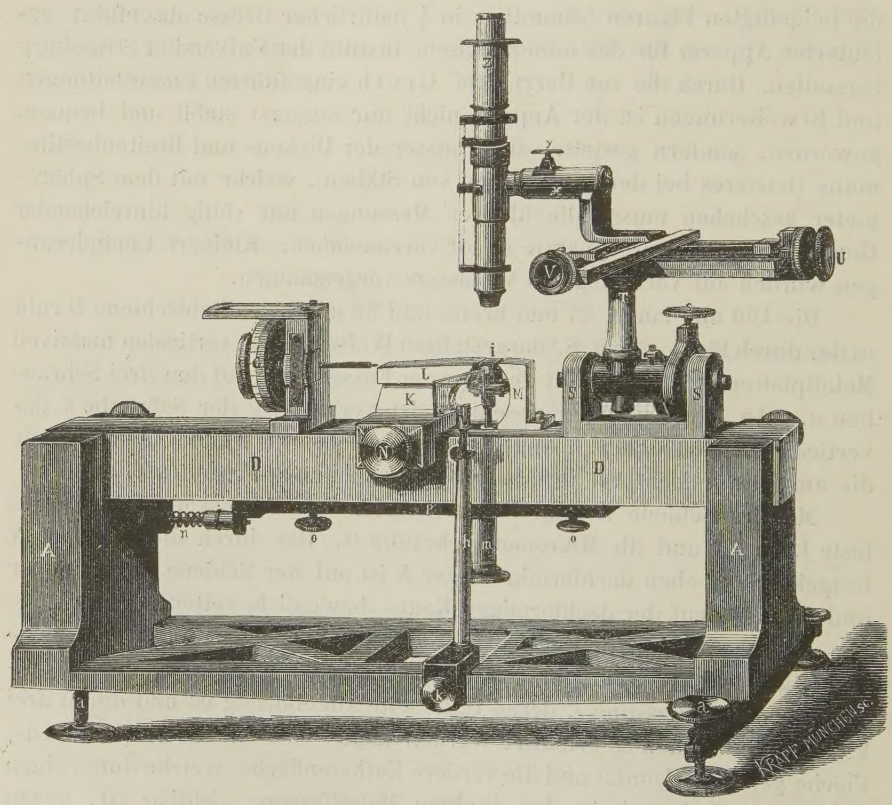
Mit der Schiene D sind fest verbunden der Mikroskopträger S, das feste Lager M und die Mikrometerschraube G. Das durch die Schraube N festgeklemmte oben dachförmige Lager K ist auf der Schiene verschiebbar und trägt das auf der dachförmigen Kante (beweglich) reitende Lager L.

Zwischen den beiden höchsten Kanten der nach der Mitte zu ansteigenden Lager befindet sich nun das totalreflectirende Prisma in einer rechtwinkligen Metallfassung i, deren Unterseite kugelförmig ist und durch drei kleine Schräubchen so orientirt werden kann, dass die obere (Katheten-) Fläche genau horizontal und die vordere Kathetenfläche, welche durch einen kreisförmigen Ausschnitt der dunklen Metallfassung sichtbar ist, genau vertical wird. Das kleine Tischchen, durch welches die drei Schräubchen hindurchgehen, ruht auf einer senkrechten Axe, welche in einer schlitzförmigen Durchbohrung der Schiene D mittelst der am unteren Ende von m angebrachten Schraube auf und ab bewegt und ausserdem durch die Schraube n nach rechts und links verschoben werden kann; vermittelst der Schrauben o wird diese seitliche Verschiebung arretirt.

*) Ann. der Phys. und Chemie 1878, **5**, 251. Zeitschr. f. Kryst. **9**, 206.

Der ganze Mikroskopträger ist um die Axe SS um 90^0 nach vorn drehbar, so dass das Mikroskop auch horizontal auf die Vorderseite des Prismas i gerichtet werden kann, in welcher Stellung es durch ein an das untere Ende von T aufzuschraubendes Gegengewicht zu balanciren ist. Die Drehung um genau 90^0 wird durch das an der Oberseite der Drehungsaxe angebrachte Schräubchen controlirt, welches an die Vorderseite von D anschlägt. Die Schraube s dient zur Arretirung bei senkrechter Stellung des Mikro-

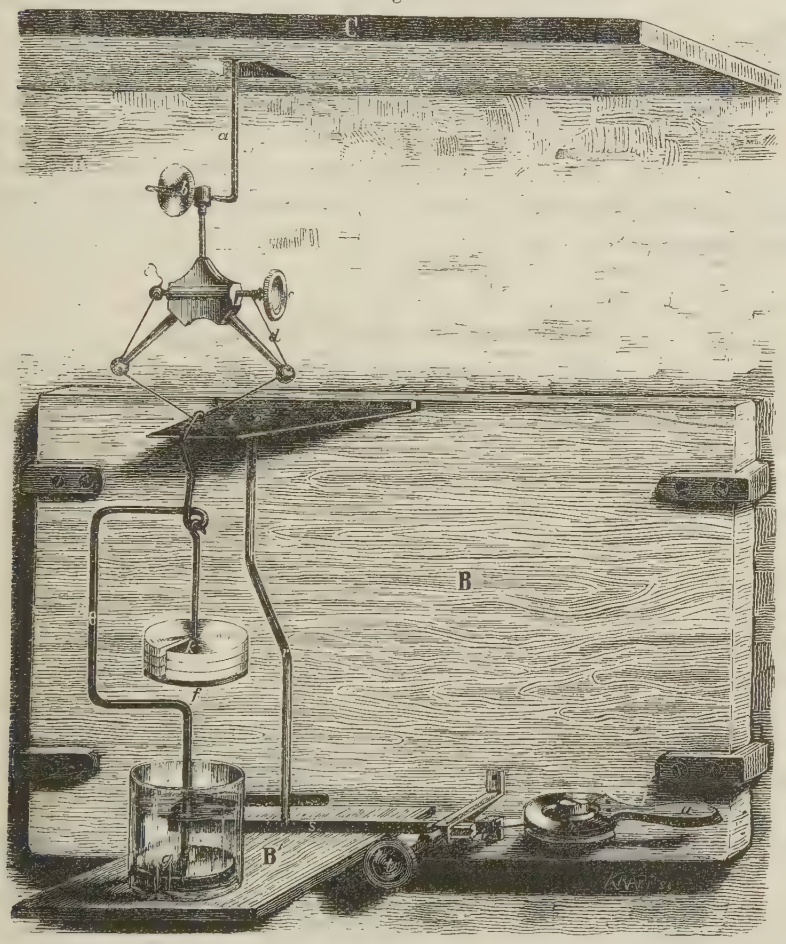
Fig. 1.



skops. Die Säule T trägt zwei senkrecht übereinander verschiebbare Schlitten, deren Bewegung mit Hülfe der Mikrometerschrauben U und V geschieht. Eine Schraubenumdrehung entspricht genau 0,5 mm, und der Umfang derselben trägt 100 Theilstriche. Die ganzen Umdrehungen werden auf dem Schlitten mit Hülfe einer Marke abgelesen. Auf 30 mm Abstand fand ich an dem zur Bestimmung des ganzen Lagerabstandes benutzten Schlitten eine Correctur von + 16 Trommeltheilen nöthig; folglich

sind zu jedem an der Trommel abgelesenen Millimeter $\frac{16}{30 \cdot 200}$ mm zu addiren. Der obere Schlitten (in der Figur von vorn nach hinten gerichtet) trägt das um die Axe x drehbare Mikroskop z. Dieses hat nur schwache Vergrösserung und besitzt einen festen und einen mit dem Ocular drehbaren Faden. Vermittelst des Mikroskops lassen sich also Längen- und

Fig. 2.



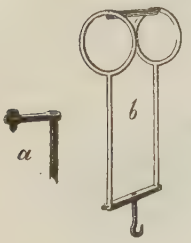
Winkeldimensionen bis auf $\frac{1}{200}$ mm resp. Bruchtheile eines Grades bestimmen.

Der ganze Apparat steht auf einer in die Mauer eingesetzten Steinplatte, welche in der Mitte ein Loch für die Belastungsvorrichtung hat.

Letztere, im Wesentlichen mit der des Herrn Koch übereinstimmend, ist in Fig. 2 dargestellt. Durch Heben einer unterhalb der Steinplatte C

an der Wand mit einem Charniere befestigten Metallplatte *i* kann das an dem durch die Schraube *c* verkürzbaren Faden hängende Gewicht auf deren Rand (der Metallplatte) aufgehangen, also von dem Krystalle losgelöst werden. Das Heben der Metallplatte kann entweder durch Drehen der Kurbel *u* rasch, oder durch Drehen der Schraube *t* langsam bewirkt werden. Der Stahlcylinder *a* endigt oben in den in Fig. 3 *a* dargestellten Theil, dessen conische Spitze, nach Unterlegen einer kleinen dünnen Gummiplatte auf die Mitte des zu biegenden Stäbchens aufgesetzt wird. Bei den Versuchen mit den kreisförmigen Platten wurde gewöhnlich die in Fig. 3 *b* abgebildete Schneide benutzt. Die oberen runden Oeffnungen dienen zum Durchlassen der Strahlen zum Mikroskop. Der vordere Schenkel wird beim Aufhängen seitlich gedreht.

Fig. 3 *a b*.



§ 4.
Methode der Beobachtung.

Die Horizontalstellung der oberen Prismenfläche (resp. Parallelstellung derselben mit der Krystallfläche) lässt sich in der von Herrn Koch angegebenen Weise durch Spiegelung darüber gespannter Fäden controliren; in ähnlicher Weise die verticale und zur Mikroskopaxe senkrechte Stellung der vorderen Fläche des Glasprismas.

Der Abstand der Lager lässt sich mit Hülfe der in Fig. 1 abgebildeten Schlittenvorrichtung sehr bequem und genau bestimmen. Man schiebt zuerst das bewegliche Lager an das feste bis zur Berührung (beide Lager fallen, damit der Krystall nur auf zwei Linien aufliege, seitlich, das eine nach rechts, das andere nach links, ab), stellt bei verticaler Stellung des Mikroskops den unbeweglichen Faden desselben auf eine auf dem beweglichen Lager angebrachte feine Linie, schiebt dann das Lager in seine definitive Stellung zurück und stellt nochmals jene Linie ein; die Verschiebung des Schlittens ist dann gleich dem Abstande der Lager. An einem später für das mineralogische Institut in München angefertigten Apparate sind die Mikrometerschrauben so lang, dass man den Faden des Mikroskops auch auf die feste Schneide einstellen kann. Zur Controle lässt sich dann noch die Mikrometerschraube *G* benutzen. Letztere kann ausserdem dazu verwerthet werden, nach dem Abheben des beweglichen Lagers, was zur Reinigung der Schneiden öfters während der Beobachtung geschehen muss, genau die Lage desselben wiederzufinden.

Die Messung des Durchmessers kreisförmiger Platten mit Hülfe des Mikroskops und der Schlitten bietet natürlich keinerlei Schwierigkeiten.

Bei Benutzung von Stäbchen kann man die Breite zwar auch mit Hülfe

der Schlitten bestimmen, doch ist hierbei das Sphärometer vorzuziehen, mit welchem man ja ohnehin die Dickenbestimmung vornehmen muss.

Die Einstellung der Belastungsspitze resp. Schneide auf die Mitte des Lagerabstandes geschieht ebenfalls sehr bequem mit Hülfe des Mikroskops, indem man dieses in horizontaler Stellung zuerst auf eine Lagerkante einstellt, und dann um den halben Lagerabstand zurückschraubt.

Zur Erzielung eines stärkeren Lichteffectes kann man zwischen die seitlich gestellte Natriumflamme und die zwischen dem Objectiv des Mikroskops und dem Glasprisma befindliche planparallele Glasplatte (welche die Lichtstrahlen zuerst senkrecht auf die vordere Prismenfläche reflectirt und die aus dem Prisma wieder austretenden Strahlen mit einer geringen Verschiebung auf das Objectiv fallen lässt) eine Sammellinse einschalten.

Um die Beobachtung von der durch Drehung um eine Längsaxe veranlassten Bewegung der Interferenzstreifen zu befreien, empfiehlt sich das von Herrn Koch angegebene Verfahren*). Man bringt durch absichtliches leises Berühren des beweglichen Lagers die Interferenzstreifen in Bewegung und stellt (durch Auf- oder Abwärtsschrauben) das Fadenkreuz an die Stelle, welche bei der allgemeinen Bewegung der Streifen in Ruhe bleibt. Ich fand, dass die Drehungsaxe der Streifen in den meisten Fällen durch den Mittelpunkt des Fadenkreuzes ging, wenn die Belastungsspitze genau auf der Mitte der Breite und Länge des Stäbchens ruhte, und wenn das Fadenkreuz genau auf diesen Punkt eingestellt war. Wie die Mitte des Lagerabstandes zu finden ist, habe ich soeben erwähnt. Die Mitte der Breite des Stäbchens konnte ich folgenderweise genau feststellen. In dem horizontal gestellten Mikroskop ist die Breitenrichtung des Stäbchens vertical zu beobachten. Nach Einstellung des beiderseitigen Randes des Stäbchens und Ablesung an dem verticalen Mikrometer lässt sich mithin auch genau die Mitte finden. Ist nun das Gummiplättchen zwischen der Belastungsspitze und der Krystallfläche nicht zu dick, so erscheint die Spitze bei durchscheinenden Krystallen als ein kleiner heller Fleck. Auf diese Weise lässt sich die belastete Stelle auch mit Berücksichtigung der durch die planparallele Glasplatte veranlassten Verschiebung der Lichtstrahlen absolut genau einstellen und controliren.

Von der beobachteten Senkung ist noch jene in Abzug zu bringen, welche von der Durchbiegung und den Eindrückungen der Lagerkanten und der Stäbchen an den aufliegenden Stellen herrührt, d. h. von jenen Eindrücken dieser Stellen, welche beim Entlasten wieder verschwinden. Dass diese dem belastenden Gewichte proportional zu setzen ist, unterliegt keinem Zweifel. Herr Koch setzte dieselbe in seiner zweiten Arbeit auch umgekehrt proportional der Breite des Stäbchens.

---

*) Vergl. Zeitschr. f. Kryst. **9**, 207.

Ich stellte mir drei rechtwinklige Parallelepipeda von Alaun her von je 15 mm Höhe, deren Breite 4, 8 und 11 mm betrug. Bei der beträchtlichen Höhe kann man die ganze zu beobachtende Senkung als zu der letzteren Art gehörig betrachten. Bei einer Belastung von 0,2 kg und einem Lagerabstande von 16 mm beobachtete ich bei dem ersten eine Senkung von 1,2, beim zweiten von 0,8, beim dritten von 1,0 halben Wellenlängen; bei einem Lagerabstande von 12 mm waren die betreffenden Werthe bei allen dreien genau gleich 1,0. Eine Abhängigkeit der Biegung von der Breite der Parallelepipeda war also nicht zu bemerken.

Der Grund mag wohl in Folgendem liegen: Für die Eindrücke des Stäbchens und auch der Lager ist die genannte Proportionalität wahrscheinlich. Aber bei der in der Figur angedeuteten Form der Lager müssen auch beiderseits noch geringe Drehungen der Lager um irgend eine ihnen parallele Axe stattfinden, und diese sind offenbar von der Breite der belasteten Stelle unabhängig. Die vorstehenden Beobachtungen lassen demnach darauf schliessen, dass dieser letztere Einfluss wenigstens bei dem von mir benutzten Apparate der bedeutendere ist.

Dass diese Senkung der Belastung proportional ist, fand ich durch meine Beobachtungen bestätigt. Mithin sind von jeder im Folgenden beobachteten Senkung für je 0,1 kg Belastung 0,5 halbe Wellenlängen abzuziehen.

Bei den kreisförmigen Platten zog ich die Belastung mit der etwa 10 mm breiten Schneide, bei den Stäbchen dagegen die Belastung mit der Spitze vor.

§ 5.
Beobachtungen.

Eine grosse Anzahl äusserlich sehr gut ausgebildeter Pyritkrystalle, welche ich für diese Untersuchungen anschliff, überzeugte mich, dass wohl kaum eine für diesen Zweck genügend homogene Platte dieses Minerals zu beschaffen sei. Ich liess mir deshalb eine Anzahl Alaunplatten durch die Herren Steeg und Reuter herstellen; dieselben wurden parallel einer Hexaëderfläche geschliffen und am Rande diametral gegenüber mit zwei feinen Marken versehen, welche die Richtung einer Oktaëderkante angaben.

Der durch die Platte i (Fig. 2) zugleich mit den Gewichten k auslösbare Theil des Belastungsapparates, welcher also zu dem auf die Platte f gelegten Gewichte k addirt werden muss, wiegt nach Abzug des Gewichtsverlustes der unteren in Oel tauchenden Platte g 0,0644 kg.

Die Beobachtung ergab für diejenige Platte, deren Dicke an allen Stellen die grösste Uebereinstimmung zeigte, folgende Werthe.

Dicke an verschiedenen gleichweit abstehenden Stellen: 1,004,

1,004, 1,006, 1,000, 0,992, 0,996, 1,000, 1,002, 0,986, 0,994; Abstand der Lager 15 mm; Normale zu den Lagerkanten:

Belastung kg	$\perp : \infty 0 \infty$ Streifen beobachtet:	$\perp : \infty 0 \infty$ Streifen reducirt auf 0,1 kg Belastung:	$\perp : \infty 0$ Streifen beobachtet:	$\perp : \infty 0$ Streifen reducirt auf 0,1 kg Belastung:
0,1644	18,5	11,3	19	11,5
0,2644	29,5	11,2	29,5	11,2
0,3144	—	—	34,5	11,0
0,3644	39,3	10,8	39,5	10,9
0,4644	50,5	10,9	51,5	11,1
	Mittel:	11,10		11,05

Da die Platte nach diesen Beobachtungen zerbrach, so konnte der Elasticitätscoëfficient aus denselben nicht ermittelt werden. Aus den Bruchstücken ergab sich als ungefährer Werth des Durchmessers $2r =$ 19,5 mm.

Die folgende Platte wurde von 10 zu 10 Grad gedreht und bei jeder Stellung unter verschiedenen Belastungen möglichst zahlreiche Beobachtungen vorgenommen.

Es wurde gefunden mittlere Dicke: 0,830 mm; Durchmesser: 22,31 mm, senkrecht hierzu 22,29 mm.

Aus der Reihe der Beobachtungen mögen folgende herausgegriffen werden.

Abstand der Lager: 18 mm; Belastung: 0,2144 kg. Die Belastung ruhte auf der Spitze.

Normale zu den Lagerkanten:

$\perp : \infty 0$ Streifen beobachtet:	$\perp : \infty 0$ Streifen reducirt auf 0,1 kg Belastung:	E_3	$\perp : \infty 0 \infty$ Streifen beobachtet:	$\perp : \infty 0 \infty$ Streifen reducirt auf 0,1 kg Belastung:	E_1
48,5	22,6	1851	—	—	—
—	—	—	55,6	25,92	1611
56,0	26,1	1600	—	—	—
—	—	—	57,5	26,9	1555
57,0	26,5	1573	—	—	—

Nachdem die Platte wochenlang geruht hatte, wurde dieselbe nochmals untersucht und die Belastung mit der Schneide vorgenommen. Folgende Beobachtungen aus der grösseren Reihe mögen erwähnt werden: Lagerabstand: 19 mm; Belastung: 0,2144 kg.

Normale zu den Lagerkanten:

beobachtet:	$\perp : \infty O$ Streifen reducirt auf 0,1 kg Belastung:	E_3	beobachtet:	$\perp : \infty O \infty$ Streifen reducirt auf 0,1 kg Belastung:	E_1
54,1	25,2	1952	—	—	—
—	—	—	61,7	28,8	1704
65,0	30,3	1617	—	—	—
—	—	—	69,0	32,1	1526
67,0	31,2	1570	—	—	—

Einige andere Platten führten zu ähnlichen Resultaten.

Da die Biegung der kreisförmigen Platten aus den in § 2 erwähnten Gründen nicht so genaue Resultate liefern kann, wie die schmaler Stäbe, so liess ich mir durch die Herren Steeg und Reuter noch einige Stäbchen anfertigen.

Die Messung gelang bei folgenden:

1) Stab $\perp : \infty O$ (Krystall I) Breite 3,164, Dicke 0,91, Lagerabstand 11,0.

Belastung kg	Streifen beobachtet:	Streifen reducirt auf 0,1 kg Belastung:
0,1144	27,75	24,25
0,1644	38,75	23,57
0,2144	52,50	24,48
0,2644	64,00	24,20
	Mittel	24,12

davon ab 0,5. Die Rechnung nach der gewöhnlichen Formel: $E = \frac{1}{4} \frac{P}{s} \frac{l^3}{h^3 b}$ ergiebt: $E_3 = 2007$, nach der von Herrn Warburg aufgestellten genaueren Formel: $E = \frac{1}{4} \frac{P}{s} \frac{l^3}{h^3 b} \left\{1 + 3 \left(\frac{h}{l}\right)^2\right\}$ folgt: $E_3 = 2048$.

2) Stab: ∞O (Krystall II) Breite 4,184; Dicke 1,368; Lagerabstand 18,0.

Belastung kg	Streifen beobachtet:	Streifen reducirt auf 0,1 kg Belastung:
0,1644	40,3	24,5
0,2144	52,0	24,3
0,2644	64,0	24,4
	Mittel	24,4

es folgt $E_3 = 1932$ resp. 1964.

3) Stab $\perp : \infty O$ (Krystall II) Breite 3,581, Dicke 1,248, Lagerabstand 12,0.

Belastung kg	Streifen beobachtet:	Streifen reducirt auf 0,1 kg Belastung:
2,644	30,0	11,35
3,644	41,0	11,25
	Mittel	11,30

$E_3 = 1952$ resp. 2015.

Senkrecht zur Würfelfläche gelang die Messung nur bei einem Stäbchen; dasselbe wurde deshalb bei zwei verschiedenen Lagerabständen belastet.

4) Stab $\perp : \infty O \infty$ (Krystall I) Dicke 1,142; Breite 2,973.

α. Lagerabstand 11,0.

Belastung kg	Streifen beobachtet:	Streifen reducirt auf 0,1 kg Belastung:
0,1144	15,75	13,77
0,1644	24,0	14,60
0,3144	44,5	14,15
0,3644	53,0	14,54
	Mittel	14,50

$E_1 = 1823$ resp. 1882.

β. Lagerabstand 11,5.

Belastung kg	Streifen beobachtet:	Streifen reducirt auf 0,1 kg Belastung:
0,1144	18,75	16,39
0,1644	26,8	16,35
0,2144	35,5	16,56
	Mittel	16,43

$E_1 = 1831$ resp. 1891.

Da ich aus den vorstehenden Versuchen erkannt hatte, dass die Methode der kreisförmigen Platten für den Alaun wenigstens nicht zum Ziele führen würde, so entschloss ich mich, wiederum zur Beobachtung schmaler Stäbe zurückzukehren. Die Beobachtungen an den Platten lehrte aber, dass es nicht statthaft sei, an ein und demselben Stäbchen eine grössere Reihe von Beobachtungen vorzunehmen. Das der Einheit so nahe Verhältniss $\frac{E_1}{E_3}$ verlangt zur Beantwortung der Frage nach der Symmetrie äusserst genaue Werthe. Diese können also nur durch eine möglichst grosse Zahl von Stäbchen erreicht werden.

In Folge der Beobachtung Wiedemann's*), dass der Alaun schon bei 50° C. eine molekulare Umlagerung erfährt, glaubte ich nicht, wie es

*) Vergl. Zeitschr. f. Kryst. **9**, 633.

gewöhnlich geschieht, dieselben bei ihrer Herstellung mit heissem Wachs auf einer Glasplatte aufkleben zu dürfen. Ich verfertigte mir deshalb selbst eine grössere Anzahl Stäbchen, welche ich, ohne sie aufzukleben, mit freier Hand schliff und polirte. Wie ich mich nachher bei der sphärometrischen Bestimmung überzeugte, liessen dieselben in Bezug auf Gleichmässigkeit in Dicke und Breite nichts zu wünschen übrig. Das Material zu den im Folgenden mit *III—VII* bezeichneten Stäbchen bezog ich von Herrn Goldbach in Kork. Es bestand aus etwa faustgrossen Oktaëdern, welche allerdings grösstentheils schalig nach *O* aufgebaut waren; an den Enden jedoch und in der Mitte waren die Krystalle nach den drei Hexaëderflächen vollständig klar. Die daraus gefertigten Stäbchen zeigten auch mikroskopisch wenigstens an den benutzten Stellen bei gewöhnlichem Lichte*) keinerlei Inhomogenität. Der mit *I* bezeichnete Krystall ist identisch mit dem im Vorhergehenden mit *I* bezeichneten und stammt aus einer anderen Lösung.

Ein Theil der Stäbchen wurde $\perp : \infty O$, ein anderer Theil $\perp : \infty O \infty$, ein anderer Theil $\perp : O$, die grosse Mehrzahl $\perp : \infty O 2$**) geschnitten. Bei der pentagonalen Hemiëdrie gehört bekanntlich die eine Hälfte der letzteren Flächen zur positiven Gruppe, die andere zur negativen. Die bei jedem Krystall zu derselben Gruppe gehörigen Flächen sind in der folgenden Uebersicht mit dem Index ′ oder ″ bezeichnet. Durch die Zeichen α und β werden jedesmal identische (nicht etwa alle nur gleichwerthigen) Richtungen angedeutet. Die unter *E* stehenden Werthe sind nach der genaueren von Herrn Warburg aufgestellten Formel berechnet. Die Durchbiegung der Lager u. s. w. ist bereits abgezogen.

Die Beobachtung gelang bei folgenden:

Tabelle der auf 0,1 kg Belastung reducirten Beobachtungen.

Stäbchen:	*l*	*n*	*h*	*b*	*E*	Mittel:
			$\perp : O$			
I_1	12,032	13,52	1,153	3,599	2034	2035
I_2	12,032	13,85	1,142	3,569	2058	
$I_{3\alpha}$	12,032	13,75	1,162	3,544	1986	
$I_{3\beta}$	12,032	12,68	1,168	3,645	2064	
			$\perp : \infty O \infty$			
III_1	12,032	11,00	1,260	3,858	1797	1793
III_2	12,032	26,79	0,954	3,606	1794	
VI_1	12,032	22,48	0,988	3,916	1775	
VI_1	16,042	48,69	0,990	3,899	1806	

*) Ein brauchbares Polarisationsinstrument stand mir in Mülhausen nicht zu Gebote.

**) Der Winkel der Normalen zu $\infty O 2$ mit der Hauptaxe beträgt ungefähr $26\frac{1}{2}^0$; die betreffenden Stäbchen waren aber unter $22\frac{1}{2}^0$ geschnitten, weil ich unter diesem

Stäbchen:	l	n	h	b	E	Mittel:
			$\perp : \infty O 2$			
$IV'_{1\alpha}$	12,032	9,72	1,300	3,871	1854	1889
$IV'_{1\beta}$	12,032	11,43	1,207	3,935	1924	
$IV''_{2\alpha}$	12,032	13,84	1,207	3,253	1922	1898
$IV''_{2\beta}$	12,032	10,91	1,221	4,058	1900	
$IV''_{2\beta}$	16,042	25,67	1,221	4,058	1872	
IV''_{3}	12,032	18,53	1,055	3,662	1899	
V_1	12,032	36,90	0,832	3,775	1868	1868
VI'_2	12,032	8,11	1,321	4,386	1869	1892
VI'_2	16,042	18,68	1,321	4,386	1856	
$VI'_{3\alpha}$	12,032	27,67	0,897	3,990	1874	
$VI'_{3\alpha}$	16,042	60,50	0,905	4,025	1942	
$VI'_{3\beta}$	12,032	20,34	1,002	3,840	1919	
$VI''_{4\alpha}$	12,032	21,78	0,997	3,603	1937	1923
$VI''_{4\alpha}$	14,037	34,71	0,997	3,603	1922	
$VI''_{4\beta}$	12,032	14,07	1,168	3,550	1910	
VII'_1	12,032	19,39	1,000	4,124	1887	1882
VII'_2	16,042	38,63	1,089	3,762	1877	
VII''_3	12,032	13,69	1,146	3,892	1893	1872
VII''_4	12,032	18,46	1,036	3,975	1852	
			$\perp : \infty O$			
III_3	12,032	19,30	1,021	3,620	2030	1998
III_4	12,032	13,56	1,109	3,996	2050	
III_5	12,032	10,62	1,174	4,474	1975	
III_6	12,032	19,54	0,985	4,095	1971	
$III_{7\alpha}$	12,032	14,40	1,134	3,615	1998	
$III_{7\beta}$	12,032	14,06	1,130	3,768	1984	
III_8	12,032	12,17	1,148	4,162	1980	

Es folgt

$$\frac{E_3}{E_1} = 1{,}114$$

$$\frac{E_1}{E_3} = 0{,}900.$$

Zum Vergleich mögen die von Herrn Koch am Sylvin, Steinsalz und chlorsaurem Natron gefundenen Werthe erwähnt werden.

Winkel für die beiden Gruppen das Maximum der Elasticitätsdifferenz vermuthete, falls dieselbe überhaupt noch nachweisbar wäre. Der Kürze halber bezeichne ich dieselben jedoch im Folgenden mit $\perp : \infty O 2$.

	E_1	E_3	$\frac{E_1}{E_3}$
Sylvin	4010	2088	1,92
Steinsalz	4030	3395	1,19
Chlorsaures Natron	4047	3190	1,27
Nach Obigem sind die entsprechenden Werthe für den			
Alaun	1793	1998	0,90

§ 6.
Resultate.

1) Nach geometrisch gleichwerthigen Richtungen ist auch die Elasticität gleich.

2) Die Elasticität des Alauns ist kleiner als die aller anderen bekannten Krystalle.

Hieraus erklärt sich die bekannte anomale Doppelbrechung des Alauns*), indem schon geringe mechanische Kräfte bei der Krystallisation grosse molekulare Verschiebungen veranlassen.

3) Das Verhältniss $\frac{E_1}{E_3}$ der Brechungsexponenten des Alauns ist der Einheit näher als bei den übrigen bekannten Krystallen. Während bei letzteren $E_3 < E_1$ ist beim Alaun $E_3 > E_1$.

4) Auffallend ist die bei den Platten beobachtete stetige Abnahme des Elasticitätscoëfficienten bei wiederholter Belastung.

Vielleicht steht dieselbe im Zusammenhange mit der von Wiedemann erwähnten Beobachtung, dass der Alaun schon bei 50° C. eine molekulare Umwandlung erfährt.

5) Die Methode der Beobachtung der Biegung kreisförmiger Platten ergab sich in Folge der unter 3) und 4) erwähnten Erscheinungen als für den Alaun unbrauchbar. Ob die in § 2 gemachte Annahme über die Art der Biegung und die daraus entwickelte Formel für weniger empfindliches Material zu einem für ähnliche Versuche brauchbaren Resultate führen würde, bleibt unentschieden.

6) Die hemiëdrische Symmetrie der Elasticität lässt sich beim Alaun nicht erkennen.

7) Nähmen wir an, die Neumann'schen Formeln (aus § 1) hätten auch für den Alaun Geltung, so ergäbe die nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeführte Ausgleichung**), wenn wir jeden der in der Tabelle

---

*) Vergl. Reusch, Monatsberichte der Berliner Akademie, Juli 1867.

) Die Ausgleichung geschah nach der von mir in Zeitschr. f. Kryst. **5, 463 für die Krystallwinkel entwickelten Methode.

unter E stehenden Einzelwerthe dasselbe Gewicht beilegen, folgendes Resultat:

	E_1	E_2	E_3	E_4
	$\perp : \infty O \infty$	$\perp : \infty O 2$	$\perp : \infty O$	$\perp : O$
Berechnet:	1806	1892	1987	2057
Beobachtet:	1793	1894	1998	2035

Setzen wir hier $\frac{1}{E} = P$, so folgen aus der Neumann'schen Biegungsformel die Bedingungsgleichungen:

$$2(P_2 - P_1) + 3(P_3 - P_4) = 0$$
$$2(2P_2 + P_3) - 3(P_1 + P_4) = 0$$

und die Normalgleichungen:

$$0 = -0{,}0000331 + 4{,}746\ K_1 + 5{,}028\ K_2$$
$$0 = -0{,}0000363 + 5{,}028\ K_1 + 5{,}913\ K_2$$

Die Gewichte waren nach Obigem:

$$p_1 = 4, \quad p_2 = 19, \quad p_3 = 7, \quad p_4 = 4.$$

Vorstehende Beobachtungen wurden im mineralogischen, die sphärometrischen Bestimmungen im physikalischen Institute der Universität Strassburg ausgeführt.